Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2005

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR— Primer parcial , 2005 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.

1. Considere el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4\xi_1 & + & \xi_2 & - & 3\xi_3 & - & \xi_4 & = & 3 \\ 2\xi_1 & + & 3\xi_2 & + & \xi_3 & - & 5\xi_4 & = & -1 \\ \xi_1 & - & 2\xi_2 & - & 2\xi_3 & + & 3\xi_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

   Encuentre todas sus soluciones.

2. Considere los conjuntos

$$
\begin{aligned}
A &= \{\xi \;/\; 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 1\} \\
B &= \{\xi \;/\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}
\end{aligned}
$$

   a) ¿Son variedades afines?
   b) ¿Qué dimensión tienen?
   c) ¿Se cortan? En caso afirmativo, encuentre una ecuación paramétrica para la variedad intersección.

3. Considere el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -x - \alpha y + z = 0 \\ 2x + 2y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

   a) Encuentre todas las soluciones del mismo para todos los posibles valores de α.
   b) Explique geométricamente, lo que sucede según los distintos valores de α.

   Sugerencia: Debe considerar las posiciones relativas de tres planos.

4. Considere la matriz de "Vandermonde"

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots\ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots\ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots\ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

   a) Calcule su determinante
   b) Demuestre que det $V = 0$ si y sólo si dos de los λ coinciden.

5. Sea $f : E \longrightarrow E$ tal que para algún $n > 0,\ \ f^n = 0$

   a) Demuestre que $id + f$ tiene inversa.
   Sugerencia: La identidad polinómica

   $$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$$

   es útil.

   b) Suponga que g es inversible y $gf = fg.$ Entonces pruebe que $g + f$ es inversible